Summen von Potenzen

8. April 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Eine Übungsaufgabe zum Grenzwertbegriff

In der Mathematik ist es ähnlich wie in der Musik: Übung macht den Meister. Hat man ein Kapitel in einem Mathematikbuch durchgelesen, so beginnt die eigentliche Arbeit: je nach Autor und Thema werden zwischen 10 und 50 Übungsaufgaben angeboten, die es zu lösen gilt. Wer das nicht macht, wird das Gelernte nie anwenden können. Auch später, wenn man den schleichenden Verdummungsprozeß des beruflichen Alltags in der Industrie (in meinem Falle: der Softwareindustrie) hinter sich hat, möchte man die eigenen grauen Zellen gerne wieder in Schwung bringen und greift sich dann aus den ersten 100 Seiten eines der Bücher, die schon lange darauf warten, endlich mal ganz durchgearbeitet zu werden, eine Aufgabe heraus, die man gerade noch so versteht. Z.B. auf Seite 100 von Klaus Fritzsches Buch "Grundkurs Analysis 1" die folgende Aufgabe:

Es soll der Grenzwert der Folge

$$a_n := \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$$

berechnet werden. Na, wenn das nichts ist! Für den Zähler gibt es sicher irgendeine nette Formel in Abhängigkeit von n, dann muß man nur noch durch n^3 dividieren und schon kennt man den Grenzwert. Die Frage ist nur: wie lautet denn diese nette kleine Formel für den Zähler von a_n ? In seinen Lösungen macht es sich Fritzsche leicht: er benutzt ein Ergebnis einer früheren Aufgabe, wo mittels vollständiger Induktion gezeigt wurde, daß

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt.

Aber darauf muß man auch erst mal kommen. Beweise per vollständiger Induktion setzen ja immer voraus, daß man auch eine Behauptung aufstellen kann, die es zu beweisen gilt. Wie könnte man also intuitiv auf den Ausdruck

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

kommen?

1.1 Herleitung nach dem Prinzip der Teleskopsumme

Wir setzen $b_i := i^2$ und wollen den Grenzwert der Folge

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

berechnen. Der Trick besteht darin, die *Teleskopfunktion* auf die Folge $c_j = j^3$ anzuwenden. Mit

$$A_j := c_{j+1} - c_j = (j+1)^3 - j^3 = 3j^2 + 3j + 1$$

erhalten wir dann

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} A_i &= c_{n+1} - c_1 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1) \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + 1 \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + 1 \\
&= (n+1)^3 - 1 \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n
\end{aligned}
$$

Jetzt braucht man nur noch $\sum_{i=1}^{n} i^2$ auf eine Seite zu stellen und schon hat man das gewünschte Ergebnis:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.2 Herleitung mit Hilfe der Differenzenfolge

Wenn wir $b_i := i^2$ setzen, so interessieren wir uns also für die Folge

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Irgendwo muß man mit dem Basteln anfangen. Schreiben wir also die Folge der b_i hintereinander auf:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$$

Und jetzt bilden wir die Differenzenfolge:

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

Das sieht doch schon mal ganz nett aus! Summen von ungeraden Zahlen lassen sich sicher einfacher aufschreiben als solche von Quadraten. Vielleicht können wir ja die Summe der Quadrate so umschreiben, daß dort nur Summen von ungeraden Zahlen vorkommen! Wir probieren es einfach:

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= 2n+1 \\
&\downarrow \\
\sum_{i=1}^{n+1} b_i &= b_{n+1} - b_n + 2(b_n - b_{n-1}) + 3(b_{n-1} - b_{n-2}) + 4(b_{n-2} - b_{n-3}) + \cdots \\
&\quad \cdots + (n-1)(b_3 - b_2) + n(b_2 - b_1) + (n+1)b_1 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(b_{i+1} - b_i)(n-(i-1)) + (n+1)\cdot b_1 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(2i+1)(n-(i-1)) + n + 1 \\
&= n\sum_{i=1}^{n}(2i+1) - \sum_{i=1}^{n}(2i+1)(i-1) + n + 1 \\
&= n\left(2\sum_{i=1}^{n} i + n\right) - \sum_{i=1}^{n}(2i+1)(i-1) + n + 1 \\
&= n\left(2\cdot\frac{n}{2}(n+1) + n\right) - \sum_{i=1}^{n}(2i+1)(i-1) + n + 1 \\
&= n^2(n+2) - \sum_{i=1}^{n}(2i+1)(i-1) + n + 1 \\
&= n^2(n+2) + n + 1 - \left(2\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= n^2(n+2) + n + 1 - \left(2\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= n^2(n+2) + n + 1 - \left(2\sum_{i=1}^{n} b_i - \frac{n(n+1)}{2} - n\right) \\
&= n^2(n+2) + n + 1 - 2\sum_{i=1}^{n} b_i + \frac{n(n+1)}{2} + n \\
b_{n+1} + 3\sum_{i=1}^{n} b_i &= n^2(n+2) + \frac{n(n+1)}{2} + n \\
(n+1)^2 + 3\sum_{i=1}^{n} b_i &= n^2(n+2) + \frac{n(n+1)}{2} + n \\
3\sum_{i=1}^{n} b_i &= n^2(n+2) + \frac{n(n+1)}{2} + n - (n+1)^2 \text{ d.h.} \\
\sum_{i=1}^{n} b_i &= \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) \\
&= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

q.e.d

2 Summe der Potenzen für $k = 3$

Einmal auf den Geschmack gekommen, könnten wir ja auch versuchen, die entsprechende Formel für die dritte Potenz zu bestimmen. Was könnte also bei

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

herauskommen? Wir versuchen es wieder mit der Teleskopsumme, weil die ja offensichtlich weniger Rechenarbeit verursachte. Wir setzen also $a_j = j^4$ und

$$\begin{aligned} A_j &:= a_{j+1} - a_j \\ &= j^4 + 4j^3 + 6j^2 + 4j + 1 - j^4 \\ &= 4j^3 + 6j^2 + 4j + 1 \end{aligned}$$

Und daraus folgt, wenn wir die Teleskopsumme bilden:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} A_j &= a_{n+1} - a_1 \\ &= (n+1)^4 - 1 \\ &= 4\sum_{j=1}^{n} j^3 + 6\sum_{j=1}^{n} j^2 + 4\sum_{j=1}^{n} j + n \\ &= 4\sum_{j=1}^{n} j^3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n \end{aligned}$$

Aus dieser letzten Gleichung kann man jetzt $\sum_{j=1}^{n} j^3$ ausrechnen:

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

3 Summen mit höheren Potenzen

An der letzten Summenformel

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

fällt einem auf, daß auf der rechten Seite das Quadrat der Summe der ersten n Zahlen steht:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

Es wäre also interessant, auch die höheren Potenzen einmal auszurechnen und zu prüfen, ob dort auch ähnliche Ausdrücke vorkommen:

$$S_4 := \sum_{j=1}^{n} j^4$$

$$S_5 := \sum_{j=1}^{n} j^5$$

$$S_6 := \sum_{j=1}^{n} j^6$$

usw. Im Prinzip müßte es möglich sein, mit dem Ansatz der Teleskopsummen die weiteren Potenzsummen S_4, S_5, S_6 etc. zu berechnen. Allerdings stellt man dann schnell fest, daß der Rechenaufwand ganz erheblich ist. So habe ich mit einigem Aufwand die Summenformel für $k = 4$ (also in der Summe immer die vierte Potenz einsetzen) berechnet:

$$\sum_{j=1}^{n} j^4 = \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)$$

Für noch höhere Potenzen sollte man einen Blick in die Literatur werfen, und da wird man sehr schnell fündig. Anfang des 17.Jahrhunderts hat Johann Faulhaber[1] solche Summen von Potenzen berechnet und dabei folgendes herausgefunden:

$$\begin{aligned}
1^1 + 2^1 + \cdots + n^1 &= N\,, \qquad N = (n^2+n)/2\,;\\
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= N^2\,;\\
1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 &= (4N^3 - N^2)/3\,;\\
1^7 + 2^7 + \cdots + n^7 &= (12N^4 - 8N^3 + 2N^2)/6\,;\\
1^9 + 2^9 + \cdots + n^9 &= (16N^5 - 20N^4 + 12N^3 - 3N^2)/5\,;\\
1^{11} + 2^{11} + \cdots + n^{11} &= (32N^6 - 64N^5 + 68N^4 - 40N^3 + 5N^2)/6\,;\\
1^{13} + 2^{13} + \cdots + n^{13} &= (960N^7 - 2800N^6 + 4592N^5 - 4720N^4 + 2764N^3\\
&\qquad - 691N^2)/105\,;\\
1^{15} + 2^{15} + \cdots + n^{15} &= (192N^8 - 768N^7 + 1792N^6 - 2816N^5 + 2872N^4\\
&\qquad - 1680N^3 + 420N^2)/12\,;\\
1^{17} + 2^{17} + \cdots + n^{17} &= (1280N^9 - 6720N^8 + 21120N^7 - 46880N^6 + 72912N^5\\
&\qquad - 74220N^4 + 43404N^3 - 10851N^2)/45\,.
\end{aligned}$$

Literatur

[1] D E Knuth, Johann Faulhaber and Sums of Powers, Mathematics of Computation 61 (1993), 277-294.

[2] John H. Conway, Zahlenzauber, Verlag Birkhäuser, Seite 120 (Bernoulli-Zahlen)